
Vous ne trouverez
jamais ce que vous ne
cherchez pas.
Dr TRAORÉ
vous souhaite une
excellente nuit
DOCTEUR
TRAORÉ

Université Nangui Abrogoua

Année : 2018 / 2019

–Licence 3 Maths

*Examen de Topologie (session 2 )*

*Durée : 3 h 00*

---

**Le sujet comporte quatre exercices indépendants répartis sur deux pages.**

**Exercice 1** **(3 points)**

Soit $X$ un ensemble non vide quelconque. On munit $X$ de la topologie discrète.

1. Quels sont les parties fermées de $X$ ?
2. Soit $A$ un sous-ensemble de $X$.
   $(i)$ Quel est l'intérieur de $A$ ?
   $(ii)$ Quelle est l'adhérence de $A$ ?
3. Soit $x$ un élément de $X$. Déterminer l'ensemble des voisinages de $x$.

**Exercice 2** **(5 points)**

Soit $(X, d)$ un espace métrique.

1. Montrer que toute suite de Cauchy de $X$ qui possède une sous-suite convergente est convergente.
2. En déduire que si $(X, d)$ est compact alors $(X, d)$ est complet.
   Donner un exemple d'espace métrique complet qui n'est pas compact.

**Exercice 3** **(4 points)**

Pour tous $p, q$ éléments de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$d(p, q) = 0 \text{ si } p = q \quad \text{et} \quad d(p, q) = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \text{ si } p \neq q.$$

1. Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{N}^*$ par $f(p) = p + 1$.
   $(i)$ Montrer que si $p \neq q$ alors

$$d(f(p), f(q)) < d(p, q).$$

   $(ii)$ Montrer que $f$ n'est pas contractante.

**Exercice 4** **(8 points)**

On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose, pour $P \in E$,

$$N_1(P) = \sup\{|P(x)| \,:\, x \in [1,\ 2]\}$$

et

$$N_2(P) = \sup\{|P(x)| \,:\, x \in [0,\ 1]\}.$$

On suppose que $N_1$ est une norme sur $E$.

On définit sur $E$ l'application $\Phi$ par

$$\Phi(P) = P(0).$$

1. Montrer que $N_2$ est une norme sur $E$.
2. Montrer que $\Phi$ est une forme linéaire continue sur $(E,\ N_2)$.
3. Calculer la norme de $\Phi$.
4. Montrer que $\Phi$ n'est pas continue sur $(E,\ N_1)$

   **Indication :** Considérer $P_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Les normes $N_1$ et $N_2$ sont-elles équivalentes ? (Justifier votre réponse.)
6. Soit $U = \{P \in E \,:\, P(0) \neq 0\}$.

   $(i)$ Montrer que pour tout $P \in U$, la boule ouverte (par rapport à $N_2$) de centre $P$ et de rayon $r = |P(0)|$ notée $B_{N_2}(P,\ r)$ est incluse dans $U$.

   $(ii)$ Que peut-on alors dire de $U$ par rapport à $(E,\ N_2)$ ?

Université Nangui Abrogoua Année : 2017 / 2018

–Licence 3 Maths *Examen de Topologie* ($1^{ère}$ *session*) *Durée : 3 h 00*

---

**Le sujet comporte cinq exercices indépendants répartis sur deux pages.**

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ **(2 points)**

Soit $(X, d)$ un espace métrique. Soit $A \subset X$ un ensemble non vide.
On suppose que

$$\forall\ (a, b) \in A^2 \text{ avec } a \neq b \text{ on a } d(a, b) \geq 1.$$

Montrer que $A$ est fermé dans $X$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ **(3 points)**

Soient $(X, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A$ est d'intérieur non vide

(ii) $A$ rencontre toute partie qui est dense dans $X$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ **(4 points)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques et $g : X \to Y$ une bijection continue.

1. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $X$ qui converge vers $x \in X$.
   Montrer que l'ensemble
   $$C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$
   est un compact de $X$.
2. Montrer que si $X$ est compact alors $g$ est un homéomorphisme.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ **(5 points)**

On considère $X = ]0, +\infty[$ et l'application $\delta : X \times X \to [0, +\infty[$ définie par

$$\delta(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|.$$

1. Montrer que $(X,\ \delta)$ est un espace métrique.
2. Montrer que $(X,\ \delta)$ est complet.
3. Soit $h\ :\ (X,\ \delta) \to (X,\ \delta)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\exists k \in ]0,\ 1[,\ \forall x \in X,\ \ x|h'(x)| \leq kh(x).$$

   Montrer que $h$ admet un point fixe unique.

**Exercice 5** **(6 points)**

Soit $E$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\ 1]$, à valeurs réelles et qui sont telles que

$$f(0) = 0 \ \text{ et } \ f'(0) = 0.$$

Etant donné que $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \ \text{ et } N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + 2f'(x) + f''(x)|.$$

On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

1. Montrer que l'application $N(\cdot)$ est une norme sur $E$.
2. On pose

$$h = f + f' \ \text{ et } \ g = f + 2f' + f'' = h + h'.$$

   a) Justifier que pour tout $x \in [0,\ 1]$ on a

$$e^x f(x) = \int_0^x e^t h(t)dt \quad \text{et} \quad e^x h(x) = \int_0^x e^t g(t)dt.$$

   b) Déterminer la plus petite constante réelle $C$ telle que

$$\forall f \in E,\ \ \|f\|_\infty \leq CN(f).$$

3. En utilisant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(x) = x\sin(nx),$$

   montrer que $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ ne sont pas équivalentes.

Yao Kouadio

République de Côte d'Ivoire
Union – Discipline – Travail

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Nangui Abrogoua

Unité de Formation et de Recherche des Sciences Fondamentales et Appliquées

Année académique 2018 - 2019 Licence L3 Maths
Examen de l'UE de Calcul Différentiel ( 1ère session).
Durée 03 heures du 20 Décembre 2019

*( Sont interdits les documents, les calculatrices programmables, les micro-ordinateurs, les ordinateurs et tout autre matériel électronique. N.B tous les téléphones portables doivent être fermés ).* **ECU I *( 01 heure 30 min)***

**Exercice I.** Soient $a$ et $b$ deux réels de telle sorte que $|\,a\,b| < 1$.

1. Soit $v \in IR$. On définit $g : IR \to IR$ par 1

$$g(x) = x + a\sin(v - b\sin x)$$

Démontrer que $g$ réalise une bijection de $IR$ sur $IR$.

2. On pose $f(x, y) = (x + a\sin y,\ y + b\sin x)$.

Démontrer que $f$ réalise un $C^1$- difféomorphisme de $IR^2$ sur lui – même.

**Exercice II.**

1) Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$ définit $y$ comme fonction de $x$ au voisinage du point $(-1,\ 1)$. Calculer alors $\dfrac{dy}{dx}$ en ce point.

2) Démontrer que la relation $x + y + z + \sin(xyz) = 0$ définit $z$ comme fonction de $x$ et de $y$ au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Calculer alors $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ au voisinage de ce point.

**Exercice III**

On considère la courbe plane d'équation $x e^y + e^x \sin(2y) = 0 \qquad (1)$

1. Vérifier que l'équation $(1)$ admet une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.

2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction $\varphi$ en le point $(0, \varphi(0))$.

3. En déduire la limite de $\dfrac{y}{x}$ quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$ en étant sur la courbe.

**Exercice IV.**

Soit $f$ une application de $IR^2 \to IR$, qui, à tout

$$(x, y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & si\ (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & si\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1). Montrer que $f$ est continue en $(0, 0)$.

2). Montrer que $f$ n'est pas différentiable à l'origine. ( c'est – à – dire en $(0,0)$).

# ECŬ II *( 01 heure 30 min)20-12-2019*

## Exercice I.

Une boîte rectangulaire ouverte au – dessus a un volume de 32 $cm^3$. Quelles doivent être ses dimensions *( longueur L, largeur l et hauteur h)* pour que sa surface totale soit minimale ?

## Exercice II.

*Soit $\alpha$ un paramètre réel. On définit la fonction*

$$f : \begin{cases} IR^2 \to IR \\ (x, y) \mapsto (x+y)^2 - \alpha x^3 + x^4 \end{cases}$$

1. *Déterminer les points critiques de $f$*
2. *Calculer la matrice hessienne et le hessien de $f$ en tout point $(x, y)$ de $IR^2$.*
3. *Le calcul de la question précédente permet – il de conclure à l'existence d'un extrémum en $(0, 0)$ ? Justifiez votre réponse.*
4. *Calculer $f(x, -x)$.*
5. *En déduire la nature du point critique $(0, 0)$. On pourra distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.*
6. *Déterminer la nature des autres points critiques de $f$ ( s'ils existent ).*

## Exercice III.

Soit $u = \{(x, y, z) \in IR^3 ;\ x > 0, y > 0, z > 0\}$

Soient $f, g, h$ des fonctions définies de $u$ dans $IR$ par $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$,

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $h(x, y, z) = x - y - z$.

*a)* Montrer que l'ensemble des zéros communs à $g$ et $h$ est une sous - variété $M$ de $IR^3$.

*b)* Ecrire la condition nécessaire pour que $f$ présente un minimum lié en $m(x, y, z) \in u$ sur $M$.

*c)* En déduire le point $m(x, y, z) \in u$ où $f$ présente un minimum lié sur $M$.

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

| UFR SFA | L3 MIA | Examen de $1^{ère}$ session d'Algèbre 5 | 2018-2019 |
|---|---|---|---|
| | ECUE 1 Groupes - semestre 5 | Durée 1 H 30 | |

## Exercice 1

Soit $G$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ muni de la multiplication.

Soit $H$ l'ensemble des matrices s'écrivant $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = h_{a,b}$ où $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

1) a) Montrer que $H$ est un sous-groupe de $G$.

b) $H$ et $G$ sont-ils abéliens? Justifier.

c) $H$ est-il un sous-groupe distingué dans $G$? Justifier.

d) $H$ est-il un sous-groupe caractéristique de $G$? Justifier.

2) Soit $J$ l'ensemble des matrices s'écrivant $h_{a,0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}\setminus \{0\}$.

$J$ est-il un sous-groupe distingué dans $G$? Que peut-on dire de $J \cap H$?

3) Quel est le centre de $H$?

## Exercice 2

I. Soit $(G, \times)$ un groupe d'élément neutre $e$ et soit $x$ un élément de $G$ tel que $x^n = e$ pour un entier naturel $n$.

Montrer que l'ordre de $x$ divise $n$.

II. Soient $(G, \cdot)$ un groupe, $x$ et $y$ deux éléments de $G$.

a. Montrer que si $x$, $y$ et $xy$ sont d'ordre 2, alors $xy = yx$ ;

b. Montrer que si $x$ est d'ordre fini, alors $x^{-1}$ est d'ordre fini, de plus $x$ et $x^{-1}$ ont le même ordre ;

c. Montrer que si $x$ est d'ordre fini alors $yxy^{-1}$ est d'ordre fini, de plus $x$ et $yxy^{-1}$ ont le même ordre;

d. Montrer que si $xy$ est d'ordre fini alors $yx$ est d'ordre fini, de plus $xy$ et $yx$ ont le même ordre.

III. Soient $G$, $G'$ deux groupes, $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, $x$ un élément de $G$ d'ordre fini et $n$ l'ordre de $x$.

Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini dans $G'$ et que l'ordre de $f(x)$ divise $n$.

IV. Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif et $T$ l'ensemble des éléments de $G$ d'ordre fini. Montrer que $T$ est un sous-groupe de $G$.

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Examen de $1^{ère}$ session d'Algèbre 5 | 2018-2019

ECUE 2 Actions de Groupes - semestre 5 | Durée 1 H 30

## Exercice 1

Soit $(G, *, e)$ un groupe fini.

(1) On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, x) &\longmapsto g.x := g * x * g^{-1}. \end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit d'une action du groupe $G$ sur lui-même.

(2) Lorsque qu'un groupe $G$ agit sur un ensemble $X$, on appelle *points fixes* les éléments de $X$ qui sont invariants sous l'action de $G$ ; ils forment l'ensemble $\{x \in X \mid g.x = x, \forall g \in G\}$. Décrire les points fixes de l'action par conjugaison d'un groupe $G$ sur lui-même.

(3) Dans le cas $G = \mathbb{S}_4$, décrire les orbites et les stabilisateurs.

(4) Combien y a-t-il d'orbites pour l'action par conjugaison de $\mathbb{S}_{10}$ sur lui-même ?

(5) Appliquer l'équation aux classes à cette action pour montrer qu'il existe une famille finie $\{H_i\}_{i \in I}$ de sous-groupes stricts de $G$ (i.e. $\neq \{1_G\}$ et $\neq G$) telle que

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i \in I} \frac{|G|}{|H_i|}.$$

## Exercice 2

I) Montrer que le fixateur est un sous-groupe du stabilisateur.

II) Soit $G$ un groupe d'ordre 27 et soit $C$ son centre (i.e. l'ensemble des $c \in G$ tels que $gc = cg$ pour tout $g \in G$).

1) Le groupe $G$ opère sur lui-même par conjugaison, en considérant les cardinaux des orbites des éléments de $C$ et des éléments de $G \backslash C$, montrer que $card(C) > 1$.

2) Montrer que si $G/C$ est cyclique alors $G$ est abélien.

3) Peut-on en déduire que $G$ est abélien? Justifier.

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Examen de $2^{ème}$ ses d'Algèbre 5 | Durée 1 H 30 | 2016-2017

ECUE 1 Groupes - semestre 5

## Exercice 1

I) Soit $G$ un groupe. On appelle centralisateur d'un sous-ensemble $S$ dans $G$ l'ensemble

$$Z_G(S) = \{y \in G : \forall s \in S,\ y \cdot s = s \cdot y\}$$

On appelle centralisateur d'un élément $a$ de $G$ l'ensemble $Z_G(\{a\})$ noté $Z_a$.

1) Que peut-on dire de $Z_a$ et de $\langle a \rangle$ ?

$\langle a \rangle \subseteq Z_G(\{a\}) = Z_a$ sont des sous-groupes de $G$ $\boxed{2 \text{ pt}}$.

2) Que peut-on dire de l'intersection de tous les centralisateurs?

$Z(G) = Z_G(G) \subseteq Z_G(S)$ pour tout sous-ensemble $S$ de $G$.

Donc $\bigcap_{S \in \mathcal{P}(G)} Z_G(S) \subseteq Z(G) = Z_G(G) \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{P}(G)} Z_G(S)$ d'où

$Z(G)$ est l'intersection de tous les centralisateurs. $\boxed{2 \text{ pt}}$

3) Que peut-on dire de $Z_G(G)$ ?

$Z_G(G) = \{y \in G : \forall s \in G,\ y \cdot s = s \cdot y\} = Z(G)$ est le centre de $G$ qui est un sous-groupe normal de $G$. $\boxed{2 \text{ pt}}$

4) Si $S$ et $T$ sont deux sous-ensembles de $G$ que peut-on dire de $Z_G(S \cup T)$ et de $Z_G(S)$ ?

$S \subseteq S \cup T$ donc $Z_G(S \cup T) \subseteq Z_G(S)$ sous-groupes de $G$. $\boxed{1 \text{ pt}}$

5) Si $S$ et $T$ sont deux sous-ensembles de $G$ que peut-on dire de $Z_G(S \cap T)$ et de $Z_G(S)$ ?

$Z_G(S) \subseteq Z_G(S \cap T)$ sous-groupes de $G$. $\boxed{1 \text{ pt}}$

II) Soit $G$ un groupe d'ordre $nm$ et $H$ un sous-groupe normal de $G$ d'ordre $n$.

1) Démontrer que, pour tout $a \in G$, on a $a^m \in H$.

Dans $G/H$ d'ordre $m$ on a $(\bar{a})^m = \bar{1}$ donc $a^m \in cl(1_G) = H$. $\boxed{2 \text{ pt}}$

2) On suppose que $n \wedge m = 1$. Démontrer que $H$ est l'unique sous-groupe de $G$ d'ordre $n$.

$H$ un sous-groupe normal de $G$ d'ordre $n$.

D'après 1) $H$ contient tous les $a^m$

$n \wedge m = 1$ donc $\exists u, v \in \mathbb{N}$ tels que $nu + mv = 1$

Soit $x \in H$ comme $|H| = n$, on a $x^n = 1_G$ et $x = x^{nu+mv} = x^{mv} = (x^v)^m \in \{a^m,\ a \in G\}$

donc $H = \{a^m,\ a \in G\}$ ; cet ensemble est unique. $\boxed{2 \text{ pt}}$

## Exercice 2

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Corrigé de $2^{\text{ème}}$ ses d'Algèbre 5 | Durée 1 H 30 | 2016-2017

ECUE 2 Actions de Groupes - semestre 5

## Exercice 1

Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble non vide $E$ et soit $X$ une partie non vide de $E$. Montrer que

a) $Fix_G(X)$ est un sous-groupe normal de $Stab_G(X)$.

b) Si $\varphi$ est l'homomorphisme de $G$ dans $S_E$ associé à l'opération alors on a:

$$\ker\varphi = \bigcap_{x\in E} G_x.$$

## Exercice 2

Soit $G$ un groupe et $Z(G)$ son centre :

$$Z(G) = \{x \in G;\ \forall y \in G, xy = yx\}.$$

1) $Z(G)$ est-il toujours un sous-groupe distingué de $G$? Justifier.

2) Si $p$ est un nombre premier que peut-on dire d'un groupe d'ordre $p$? Justifier.

3) Démontrer que le centre d'un $p-$groupe n'est jamais trivial.

En déduire qu'un groupe de cardinal $p^2$ est abélien.

COMPOSITION D'ANALYSE NUMERIQUE

Université de Nangui Abrogoua– Licence de Mathématiques et Informatique

1 ère Session–Durée 3 Heures

Année Universitaire 2018-2019

**Exercice: N° 1**

1. Montrer que la fonction $f(x) = ln(x) + x = 0$ admet une racine dans l'interval $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$
2. Détrminer le nombre d'itération par la méthode de Dichotomie avec $\varepsilon = 10^{-4}$.
3. Détrminer la racine de cette fonction par la méthode de Newton avec $\varepsilon = 10^{-4}$. et donner une approximation de la racine avec 10 décimales.
4. Détrminer la racine de cette fonction par la méthode de Newton avec $\varepsilon = 10^{-4}$ en Maple.
5. Déterminer le polynôme de lagrange $P$ qui interpole les points $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$
6. Evaluer numériquement $I = \int_1^2 f(x)dx$ par la méthode des trapèzes pour le pas $h = \dfrac{1}{3}$
7. Montrer que 9325 sécrit bien $(10010001101101)_2$ en base 2 puis reconvertir $(10010001101101)_2$ en base 10.
8. Construire le polynôme de lagrange $P$ qui interpole les points $(-1, 2) - (0, 1) - (1, 2)$ et $(2, 3)$ en Matlab.

$x_0 = \frac{1}{2}$

$[\frac{1}{2}, 1]$

**Exercice: N° 2**

Soit l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{pour } t \in ]0; 1]$$

1. Ecrire le schéma numérique implicite.
2. Ecrire le schéma numérique explicite.

**Exercice: N° 3**

Soit le système linéaire suivant

$$S_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

1. Résoudre le système $S_1$ par la méthode itérative de Jacobi
2. Est que la méthode itérative de Jacobi converge.
3. Résoudre le système $S_1$ par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

**Exercice: N° 4**

Soit le système linéaire suivant

$$A = \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

1. Donner la décomposition $LU$ de la matrice $A$ avec $L$ est la matrice triangulaire inférieure et $U$ est la matrice triangulaire supérieure
2. En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$
3. Résoudre le système $A^2x = c$ avec $c = (x, y, z, t\ ) = (0, 2, -1, 4)$
4. calculer le déterminant de la matrice $A^2$.

COMPOSITION DE LOGICIEL SCIENTIFIQUE

Université de Nangui Abrogoua– Licence de Mathématiques et Informatique

1ère Session–Durée 3 Heures

Année Universitaire 2018-2019

## Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{(1-x)sinx}{1+\cos 2x}$.

1. Définir la fonction $f$ en Maple.
2. Etablir en Maple les singularités ( les points où la fonction n'est pas définie) de la fonction $f$.
3. Calculer les limites de $f$ au point $x = 4.$ et en $+\infty$. en maple.
4. Calculer en Maple $f'(x)$.
5. Représenter la courbe $C_f$ de la fonction $f$ sur $[-4, 4]$ en Maple.
6. Calculer et tracer en Maple la dérivée seconde de la fonction $g(x) = x\sin(2x)$ sur $[-\pi, \pi]$.
7. Calculer en Matlab la fonction $gof(x)$.
8. Etudier la parité de la fonction $g$ en Maple.
9. Tracer en Matlab la fonction $f(x, y) = cos(x)sin(y)sin(x + y)$. Avec les variables $x, y \in [0, \pi]$, avec un pas de 0.1.

## Exercice 2

On considère le schéma numérique de la méthode de la sécante suivant:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ x_0 = \alpha, x_1 = \beta, \\ n = 1...1000 \\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon = 10^{-12} \end{cases}$$

1. Ecrire un Alogorithme de la méthode de la sécante.
2. Traduire l' Alogorithme de la méthode de la sécante en Matlab.

Soit la matrice suivante $E \in M_{(10,10)}(\mathbb{R})$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ecrire la matrice Tridiagonale $E$ en Matlab.

**Exercice: N° 3**

Soit les systèmes linéaires $S/A$ et $S/B$ suivants

$$S/A = \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases} \qquad S/B = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -5 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice $A$ et $B$ de ces systèmes en Matlab
2. Ecrire la matrice $A$ et $B$ de ces systèmes en Maple.
3. Résoudre le systèmes $S/A$ en Maple.
4. Donne en Matlab les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice $B$. [Vectr, valp] = eig(

   Donne les résultats en Matlab de chaque commande
5. >> $A(3,1)$.
6. >> $B(2,3) = 0$; >> $A(:,3)$; >> $B(1,:)$; >> $A(1:2,:) = 4$.
7. Ecrire la concatenation des matrices $A$ et $B$ en lignes.
8. Ecrire la concatenation des matrices $A$ et $B$ en colonnes.

République de Côte d'Ivoire

Union – Discipline – Travail

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Nangui Abrogoua

Unité de Formation et de Recherche des Sciences Fondamentales et Appliquées

**Année académique 2018-2019 Licence 3 Mathématiques**

**Examen D'ANALYSE COMPLEXE (1ère session)**

**Durée 3 heures du 13 Janvier 2020**

***(Aucun document n'est autorisé. N.B tous les téléphones portables doivent être fermés).***

***<u>ECU I</u> : Séries entières ; fonctions analytiques et holomorphes. Intégrales curvilignes primitives (1 heure 30 mn)***

***<u>Exercice I</u>*** *a) Calculer les nombres suivants ( chaque nombre sera donné sous la forme* $\alpha + i\beta$ *où* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont des réels*

1. $A = i\, e^{-i}$ 2. $B = \cos(3 + 5i)$

b) *Calculer l'intégrale* $\int_\Gamma e^z(\sin z + \cos z)\,dz$, où $\Gamma$ *est la courbe paramétrée par* $\gamma(t) = e^{\pi i \sqrt{t}}$, $1 \leq t \leq 4$.

***<u>Exercice II</u>.*** *1) Trouver toutes les fonctions harmoniques conjuguées v de u :* $IR^2 \to IR$, $(x, y) \mapsto e^x \sin(y)$.

*2) Est-ce que* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ *est holomorphe? Justifier votre réponse.*

*3) Trouver les singuliers et les parties singulières de la fonction*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + \cos z}$$

***<u>Exercice III</u>*** *a) Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :* $2i \sin z + e^{-iz} = 1 + 2i$

b) *Calculer l'intégrale* $\int_C (z^2 + 3z)\,dz$ *le long du cercle* $|z| = 2$, *du point (2, 0) au point (0, 2).*

***<u>Exercice IV</u>*** *Soit* $\Gamma_R \subset \mathbb{C}$ *le contour défini par le segment* $[-R, R]$ *et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamètre le segment* $[-R, R]$, *avec* $R > 1$.

1) *Calculer* $I_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$.

2) *En déduire* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos z}{1+z^2} = \frac{\pi}{e}$.

**ECU II : CALCUL DES RESIDUS – SERIES DE LAURENT ET DE FOURIER ( 1h30mn ) 13-01-2020**

**Exercice I.** *1) Développer en série de Laurent la fonction*

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$$ *suivant les puissances de z dans la couronne* $1<|z|<3$.

*2) a) Développer en série de Laurent la fonction* $f(z)=\dfrac{z^4}{(z-2)^2}$ *suivant les puissances de* $z-2$.

*b) Déterminer la partie principale et la partie régulière de cette série. Dire pour quelle raison ce développement est valable pour tout point du plan excepté le point* $z=2$.

*c) En déduire le résidu de cette fonction relatif au pôle* $z=2$.

**Exercice II.** *Trouver les singularités des fonctions complexes suivantes et préciser si ce sont des singularités isolées ou non, si ce sont des pôles et de quel ordre, des singularités essentielles ou singularités apparentes :*

1) $f(z)=\dfrac{1}{1+\sin z}$

2) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$

3) $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-iz}$

**Exercice III.**

a) *Calculer* $Res\left(\dfrac{1+2z+3z^2}{1+z+z^2-3z^3}, 1\right)$.

b) *Montrer que si f et g sont analytiques au voisinage de* $z_0$ *avec* $f(z_0)\neq 0$ *et* $z_0$ *zéro simple de g, alors on a :* $Res(f/g, z_0)=f(z_0)/g'(z_0)$.

c) *Calculer* $Res\left(\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}, i\right)$.

$b = 1+a.$
$= 1-3$
$= -2$

$c = 1+b = -1$
$b = 1+a. = -2$

$c-b = -1+2.$
$= 1.$

Yao Kouadio Fodjo Julien

Université Nangui Abrògoua
Licence 3
Semestre 4

Année 2018-2019
Maths

# Examen de Mesure et Intégration

Session du 10 janvier 2020

Durée : 3 heures

*Rédiger avec soin et rigueur – Eviter les ratures – aucun document n'est autorisé*
*Je vous rappelle que pour être admis à l'UE, il faut avoir au moins 10,00 sur 20.*

---

$\boxed{1}$ a) Énoncer et démontrer le lemme de Fatou.
b) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(g_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et positives de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^+$ convergeant simplement vers une fonction $f$ $\mu$-intégrable telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$.
Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |g_n - f| d\mu = 0.$$

$\boxed{2}$ Soit $X$ un ensemble non vide.

a) Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de $X$. Donner la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{F})$ engendrée par $\mathcal{F}$ sur $X$.

b) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]r, +\infty[, r \in \mathbb{Q}\})$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$.

c) Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K})$.

$\boxed{3}$ Soit $\mu$ une mesure finie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive.

a) Montrer que si $f$ est $\mu$-intégrable alors

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(\{f \geq n\}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n\mu(\{f \geq n\}) = 0.$$

b) Montrer que $f$ est $\mu$-intégrable si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 0} n\mu(\{n \leq f < n+1\})$$

converge.

c) En déduire que $f$ est $\mu$-intégrable si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 0}\mu(\{f \geq n\})$$

Université Nangui Abrogoua
Licence 3
Semestre 3

Karamoko

Année 2018-2019
Mesure et Intégration

# Fiche N° 2 de TD de Mesure et Intégration

**EXERCICE 1.**

1. Soit $\Omega$ un ensemble non vide et $m \in [0, +\infty]$. Déterminer les mesures positives $\mu$ sur $\sigma(\{A\})$ telle que $\mu(\Omega) = m$ ?
2. Dans cette question, on suppose que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on considère $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
   a) Déterminer une partition $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I}$ de $\Omega$ telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\{A, B\})$ ;
   b) Expliciter $\sigma(\{A, B\})$ ;
   c) Existe-t-il une probabilité $p$ sur $(\Omega, \sigma(\{A, B\}))$ telle que $p(A) = \frac{1}{4}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$ ? Si oui calculer $p(\{1, 2, 3, 4, 6\})$.

**EXERCICE 2.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A$ un élément non vide de $\mathcal{A}$ vérifiant la relation :

$$(B \in \mathcal{A} \text{ et } B \subset A) \Rightarrow (B = \emptyset \text{ ou } B = A).$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\to [0, +\infty[ \\ B &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } A \subset B \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que $\mu$ est une mesure.

**EXERCICE 3.** On définit l'application $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$, pour tout $A \subset \mathbb{N}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini} \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases}, \quad \text{avec la convention } \frac{1}{0} = +\infty$$

1. Montrer que pour toute suite finie $A_1, \cdots, A_n$ de parties de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

2. Montrer que $\mu$ n'est pas une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

**EXERCICE 4.** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ $\mu$-intégrable.

1. Montrer que $A = \{x \in \Omega : \ f(x) = +\infty\}$ est $\mu$-négligeable.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\}$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{A_n} f d\mu = 0$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(A_n)$ est finie et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\mu(A_n) = 0$.
3. Montrer sur un contre-exemple que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\mu(A_n) = 0$ n'entraîne pas que $f$ est $\mu$-intégrable.

**EXERCICE 5.** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espace mesurable et $\varphi : \Omega \to \Omega'$ une application $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-mesurable.

1. Montrer l'application $\nu : \begin{array}{ll} \mathcal{A}' \to & [0, +\infty[ \\ A' \mapsto & \nu(A') = \mu(\varphi^{-1}(A')) \end{array}$ est une mesure sur $(\Omega', \mathcal{A}')$.
2. Montrer que, pour toute application $f : \Omega' \to [0, +\infty]$ mesurable, on a

$$\int_{\Omega'} f d\nu = \int_{\Omega} f \circ \varphi d\mu.$$

3. Soit $f : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable. Montrer que $f$ est $\nu$-intégrable sur $\Omega'$ si et seulement si $f \circ \varphi$ est $\mu$-intégrable sur $\Omega$ et que dans ce cas, on a

$$\int_{\Omega'} f d\nu = \int_{\Omega} f \circ \varphi d\mu.$$

**EXERCICE 6.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mu$-intégrables de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $\mu$-intégrable.

1. Vérifier que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$ alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu = \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

2. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge $\mu$-presque partout vers $f$. Démontrer que

$$\text{si } \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu = \int_{\Omega} |f| d\mu \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0.$$

**EXERCICE 7.** $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge presque partout vers une fonction $f$.

On suppose que $\displaystyle\int_{\Omega} f_0 d\mu < +\infty$.

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

1. Avec le théorème de convergence monotone ;
2. vec le théorème de convergence dominé.

   Peut-on supprimer l'hypothèse $\int_\Omega f_0 d\mu < +\infty$ ? Si non, donner un contre exemple.

**EXERCICE 8.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ des suites de fonctions $\mu$-intégrables de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ convergeant respectivement vers des fonctions $f$ et $g$.
On suppose que $g$ est $\mu$-intégrable, que $\forall n$, $|f_n| \leq g_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega g d\mu$.
Montrer alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

**EXERCICE 9.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ où $\mu_d$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

1. Montrer que toute application $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.
2. On suppose que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_\mathbb{N} f d\mu_d = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

3. On suppose que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est intégrable si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$ converge, et si tel est le cas on a

$$\int_\mathbb{N} f d\mu_d = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

4. Énoncer la forme correspondante au théorème de la convergence dominée dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$.

**EXERCICE 10.** On rappelle que la mesure de dirac $\delta_n$ en un point $n$ de $\mathbb{N}$ est définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$\delta_n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall A \subset \mathbb{N}.$$

Soit $\lambda > 0$. On considère l'application $\mu$ définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\mu = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$.

1) Montrer que $\mu$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2) On considère sur $\mathbb{N}$ les quatre fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_1(n) = n, \quad f_2(n) = n^2, \quad f_3(n) = n! \quad \text{et} \quad f_4(n) = (-1)^n n!.$$

   a) Déterminer celles qui sont intégrales par rapport à $\mu$. On discutera éventuellement suivant la valeur de $\lambda$.

b) Dans le(s)quel(s) de ces quatres cas, la notation $\int_{\mathbb{N}} f_i d\mu$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a-t-elle un sens ? Lorsque c'est le cas, donner la valeur de cette intégrale.

**EXERCICE 11.** Soit $\mu$ une mesure finie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On considère les quatre propositions suivantes :

**(a)** $f$ est $\mu$-intégrable.

**(b)** $\lim_{n \to +\infty} \int_{\{f \geq n\}} f d\mu = 0.$

**(c)** la série $\sum_{n \geq 0} n\mu(\{n \leq f < n+1\})$ converge.

**(d)** la série $\sum_{n \geq 0} \mu(\{f \geq n\})$ converge.

1. Montrer que (a) est équivalente à (b).
2. Montrer que (a) est équivalente à (c).
3. Montrer que (c) est équivalente à (d), et que dans ces conditions

$$\sum_{n \geq 0} n\mu(\{n \leq f < n+1\}) = \sum_{n \geq 0} n\mu(\{f \geq n\}.$$

## Exercice : Entreprenariat et son contenu

### Problématique

Pour la création de son business, l'entrepreneur élabore un business plan qui constitue la préparation idéale pour les négociations avec les financiers extérieurs, banquiers, pourvoyeurs de capital. Que vous vouliez créer une nouvelle entreprise, lancer un nouveau projet dans une entreprise existante ou développer un projet existant, l'élaboration d'un plan d'affaires est un passage obligé pour donner à votre projet un maximum de chances de succès. Plus qu'un document, il s'agit d'une méthode permettant de se poser de manière structurée, une série de questions clés dont la réponse conditionnera la viabilité de votre projet. Tout au long de la vie de votre projet, il constituera votre référence et vous permettra de vérifier à chaque instant dans quelle mesure votre projet se déroule selon vos prévisions. Le cas échéant, il vous permettra de prendre les mesures correctrices nécessaires. Et si la mise en œuvre de votre projet requiert des moyens financiers dont vous ne disposez pas, le plan d'affaires sera le document indispensable pour convaincre des investisseurs potentiels de la solidité de votre projet et de l'intérêt de le financer.

### Questions

1. Dans un document que vous allez rédiger, exposer et discuter de façon chronologique sur les différentes étapes dans la création de votre entreprise. Chaque étape sera un petit paragraphe précédé de son titre souligné.

2. Donner trois raisons de la finalité d'une entreprise

DOCUMENT NON AUTORISE

Yao Kouadio Kodjo Julien

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Examen de 1ère session d'Algèbre 6 | Durée 1 H 30 | 2018-2019

ECUE1 Anneaux, Idéaux et Corps - semestre 6

## Exercice 1

On considère le polynôme à coefficients entiers $P(X) = X^2 + 3X + 4$.

1. Calculer les racines de $P$. Ce polynôme est-il réductible sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{Q}$? (On admettra que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$).

2. a) Montrer que l'anneau $B = \mathbb{R}[X]/(P)$ n'est pas un corps. Est-il un anneau intègre?

   b) La classe dans $B$ de $X^2 - X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ est elle inversible? Si oui calculer son inverse.

3. a) Montrer que l'anneau $\mathcal{C} = \mathbb{Q}[X]/(P)$ est un corps. Montrer que toute classe de $\mathcal{C}$ admet un représentant unique du premier degré $aX + b \in \mathbb{Q}[X]$.

   b) Soit $u \in \mathbb{R}$ une racine de $P$. On note $\mathbb{Q}[u] \subseteq \mathbb{R}$ le sous-anneau image de $\mathbb{Q}[X]$ par l'homomorphisme $T \mapsto T(u)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[u]$ et que $\mathbb{Q}[u] = \{\alpha + \beta\sqrt{7} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

   c) Quel est le degré de l'extension de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}[u]$ ?

## Exercice 2.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}i) = \{a + b\sqrt{3}i,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $K$ est un corps.
   Pour tout $x = a + b\sqrt{3}i \in K$, on pose $N(x) = a^2 + 3b^2$.
2. Montrer que $N$ est un morphisme du groupe $(K^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
3. Quel est le noyau de $N$?

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Examen de $1^{ère}$ session d'Algèbre 6 | Durée 1 H 30 | 2018-2019

ECUE2 Anneaux factoriels, principaux et euclidiens, Extension de corps - semestre 6

## Exercice A

I) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

1) $382x + 217y = 2$
2) $318x + 54y = 12$
3) $76x + 68y = 36$.

II)

a) Montrer que dans un anneau principal $A$, tout idéal premier non nul est maximal.

b) Enoncer et démontrer le Lemme d'Euclide.

## Exercice B

I) Soit $A$ le sous anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et $i\sqrt{3}$.

1. (a) Montrer que tout élément de $A$ s'écrit de manière unique sous la forme $a + b\sqrt{3}i$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

   (b) Quels sont les éléments inversibles de $A$?

   (c) Les éléments 2 et $1 - i\sqrt{3}$ sont-ils irréductibles dans $A$? Jusifier

   (d) $A$ est-il euclidien? Justifier.

II) Décrire le corps de rupture sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $X^3 - 27$ puis du polynôme $X^5 - 1$ tout en précisant une base et le degré de l'extension de $\mathbb{Q}$ par le corps de rupture.

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Examen de $2^{ème}$ session d'Algèbre 6 | Durée 1 H 15 | 2018-2019

# ECUE1 Anneaux, Idéaux et Corps - semestre 6

## Exercice 1

Soit $A$ un anneau commutatif.

a) Montrer que $A$ est un corps si et seulement si $A$ n'admet que les idéaux triviaux $\{0\}$ et $A$.

b) On suppose que $A$ est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux.
Démontrer que $A$ est un corps.

## Exercice 2

On dit qu'un anneau $A$ est un anneau de Boole si, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.
Soit $A$ un anneau de Boole.

1) Montrer que, pour tout $a \in A$, $a = -a$

2) Montrer que $A$ est commutatif.

## Exercice 3

On définit $A = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$où $j = \exp(\dfrac{i\pi}{3})$.

1. Montrer que $A$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2. On désigne par $\mathcal{U}(A)$ le groupe des éléments inversibles de $A$ et enfin, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.

   a) Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbb{Z}$.

   b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in \mathcal{U}(A)$ si et seulement si $N(z) = 1$.

   c) Soient $a$ et $b$ des entiers. Montrer que si $N(a + jb) = 1$ alors $a, b$ appartiennent à un ensemble à déterminer.

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L3 MIA | Examen de $2^{ème}$ session d'Algèbre 6 | Durée 1 H 15 | 2018-2019

ECUE2 Anneaux factoriels, principaux et euclidiens - Extension de corps - semestre 6

## Exercice A

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes en justifiant les réponses

1) $198x + 452y = 4$
2) $345x + 95y = 15$.

## Exercice B

I) Montrez que tout corps algébriquement clos est infini.

II) Enoncer et montrer le Théorème de Gauss dans un anneau factoriel.

III) Décrire le corps de rupture sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $X^3 - 2$ puis du polynôme $X^4 - 1$ tout en précisant une base et le degré de l'extension de $\mathbb{Q}$ par le corps de rupture.

Université Nangui Abrogoua
UFR SFA

Année universitaire 2018 - 2019

# Licence 3: Examen de Géométrie Différentielle

## 1ère Session

Durée: 2 heures 30 mn, 15/01/2020

**Exercice 1**: ( 6 points )

1°) Donner la définition d'une immersion.

2°) Enoncer le théorème de caractérisation locale des immersions.

3°) Donner la définition d'une sous - variété propre.

**Exercice 2**: ( 14 points )

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(s,t) = (\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, s) \text{ où } \cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s}).$$

L'ensemble $\mathcal{C} := f(\mathbb{R}^2)$ est appelé la caténoïde.

1°) Montrer que $f$ est une immersion de classe $C^\infty$, et que $\mathcal{C} = f(\mathbb{R} \times [0, 2\pi[)$.

2°) Montrer que $f$ est injective sur $\mathbb{R}\times]0, 2\pi[$ et sur $\mathbb{R}\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

3°) Posons

$$U_1 = f(\mathbb{R}\times]0, 2\pi[), \; U_2 = f(\mathbb{R}\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[), \; \phi_1 = [f_{\mathbb{R}\times]0,2\pi[}]^{-1} \text{ et } \phi_2 = [f_{\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}]^{-1}.$$

Montrer que $\mathcal{A} := \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ est un atlas de classe $C^\infty$ et de dimension 2 sur $\mathcal{C}$.

4°) Soit $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$g(f(s,t)) = e^{-s}.$$

Montrer que $g$ est une submersion de classe $C^\infty$.

Université Nangui Abrogoua
UFR SFA

Année universitaire 2018 - 2019

# Licence 3: Examen de Géométrie Différentielle
## 2nde Session
Durée: 2 heures 30 mn, 27/02/2020

Exercice 1: ( 6 points au moins)

Soient $(M, \mathcal{A})$ une variété différentielle de classe $C^k, k \geq 1$ et de dimension $m \geq 1$, et $TM$ la variété tangente de $(M, \mathcal{A})$.

1°) Donner la définition de l'atlas sur $TM$ que l'on a vu au cours.

2°) Montrer que l'atlas de $a)$ est bien un atlas sur $TM$ dont on présisera la classe et la dimension.

3°) Donner la définition d'un champ de vecteurs sur $(M, \mathcal{A})$ de classe $C^l, l \leq k-1$.

4°) Donner la définition d'un système de coordonnées locales sur $(M, \mathcal{A})$.

Exercice 2: ( 14 points au plus )

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

On pose

$$U_1 \ : \ = S^2 \backslash \{(0,0,1)\}, \ U_2 := S^2 \backslash \{(0,0,-1)\}, \ \phi_1(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x,y), \forall (x,y,z) \in U_1, \text{ et}$$

$$\phi_2(x,y,z) \ = \ \frac{1}{1+z}(x,y), \forall (x,y,z) \in U_2.$$

1°) Montrer que $\mathcal{A} := \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ est un atlas de classe $C^\infty$ et de dimension 2 sur $S^2$.

2°) Soit $(a, b)$ le système de coordonnées locales défini sur $U_1$ par $\phi_1$.
Calculer dans $\mathbb{R}^3$ les coordonnées de $\frac{\partial}{\partial a}(x,y,z)$ et $\frac{\partial}{\partial b}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in U_1$.

3°) Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par: $f(x,y,z) = x$.

$a)$ Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$.

$b)$ Calculer $df(u)v, \forall u \in U_1$ et $\forall v \in T_uS^2$, en utilisant la base $(\frac{\partial}{\partial a}(u), \frac{\partial}{\partial b}(u))$ de $T_uS^2$.